

Суперпозиции и теория вероятностей

В 2020 году на сайте SuperProblem была опубликована статья «Обратные задачи в шахматной композиции». В ней, в частности, речь шла о шахматно-математических задачах специального вида – суперпозициях (Ser.h#n-N? или Ser.h=n-N?), в которых помимо решения шахматной задачи необходимо найти число решений. Множественность решений возникает за счет возможных перестановок ходов, но без разветвлений и дуалей. При подсчете числа решений суперпозиции используются методы вычислений на решетках и методы комбинаторики.

Вычисления на решетках. Решение любой суперпозиции представляет собой конфигурацию небольшого числа траекторий. Эти траектории образуют базис решения. Пусть базис решения некоторой задачи Ser.h#n-N? содержит две траектории. Ход по одной траектории будем отображать на решетке движением на один шаг по горизонтали вправо, а ход по другой траектории – движением на один шаг по вертикали вверх. В данном случае мы получим двумерную решетку. В общем случае решетка будет многомерная – по числу базисных траекторий решения. Решетку можно трактовать как фазовое пространство решений задачи. Узлы решетки – точки в фазовом пространстве – соответствуют позициям, возникающим на доске при демонстрации решения от начальной позиции (нижний левый узел) до финальной (верхний правый узел), а ребра между узлами соответствуют ходам решения.

В каждой ячейке будем записывать число, равное числу способов достижения верхнего правого узла данной ячейки из начальной позиции. Число в верхней правой ячейке решетки называется суммой решетки (S); оно равно числу траекторий фазовой точки, соединяющих начальный и конечный узлы решетки. Это число равно числу решений суперпозиции N.

Методы комбинаторики. Рассмотрим несколько простых конфигураций траекторий решения задачи Ser.h#n-N?.

Если решение содержит одну траекторию, то очевидно задача имеет единственное решение $N=1$.

В случае двух автономных траекторий число решений вычисляется по формуле $N=C_n^{n_1}=C_n^{n_2}=C_{n_1+n_2}^{n_1}$

(n_1 и n_2 – количество ходов в траекториях). Здесь $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ – число сочетаний из n по k .

При наличии в решении k автономных траекторий с числом ходов n_i ($i=\overline{1, k}$) число решений вычисляется по формуле

$$N = S = \prod_{j=1}^k C_{\sum_{i=1}^j n_i}^{n_j} \quad \text{или} \quad N = S = (\sum_{i=1}^k n_i)! / \prod_{i=1}^k (n_i!) \quad (2)$$

Если конфигурация траекторий решения задачи содержит несколько взаимосвязанных траекторий, то сначала надо построить решетку для этих траекторий и найти ее сумму S_0 . Последовательный учет автономных траекторий дает рекуррентную формулу

$$S_k = S_{k-1} * C_{\sum_{i=0}^{k-1} n_i}^{n_k} \quad \text{или} \quad S_k = S_0 * C_{n_0+n_1}^{n_1} * C_{n_0+n_1+n_2}^{n_2} * \dots * C_{\sum_{i=0}^{k-1} n_i}^{n_k} \quad (3)$$

$$\text{Число решений задачи: } N = S_k = S_0 * \prod_{j=1}^k C_{\sum_{i=0}^j n_i}^{n_j} \quad \text{или} \quad N = S_k = S_0 * [\sum_{i=0}^k n_i]! / \prod_{i=0}^k (n_i!) \quad (4)$$

В более сложном случае, когда решение содержит k групп взаимосвязанных траекторий с числом ходов n_j и суммой соответствующей решетки S_j ($j = \overline{1, k}$), число решений находим по формуле

$$N = S = \prod_{j=1}^k S_j * \prod_{j=1}^k C_{\sum_{i=1}^j n_i}^{n_j} \quad \text{или} \quad N = S = \prod_{j=1}^k S_j * [(\sum_{i=1}^k n_i)! / \prod_{i=1}^k (n_i!)] \quad (5)$$

Наибольший интерес представляют конфигурации, содержащие 3 траектории, одна из которых автономная (a ходов), а длина одной из взаимодействующих равна двум. Такие схемы обозначим $T(a, 2, m)$.

В прошлом году мною было опубликовано несколько десятков суперпозиций. К сожалению, в некоторых из них позже были обнаружены побочные решения. Исправленные версии ряда суперпозиций использованы в данной статье для постановки и решения более сложных шахматно-математических задач, основанных на применении теории вероятностей. Сразу отмечу, что использованные в статье понятия и формулы не выходят за пределы школьной программы и вполне доступны любому шахматисту, владеющему навыками логического мышления.

Для удобства читателей приведу базовые сведения из теории вероятностей.

Событие называется **случайным**, если при осуществлении определенной совокупности условий оно может либо произойти, либо не произойти. Часто нас интересует наступление не какого-то конкретного события, а целой группы событий. Если нужно, чтобы наступило хотя бы одно из группы событий, то речь идет об их сумме. В таком случае события можно разделить на совместные и несовместные.

1. **Несовместные события** — это события, одновременное появление которых в одном и том же испытании невозможно.

2. **Совместные события** — это события, которые могут произойти одновременно, не исключая друг друга.

3. **Противоположные события** — два события, которые исключают друг друга и не могут произойти одновременно. Сумма вероятностей противоположных событий всегда равна 1. $P(A) + P(\bar{A}) = 1$.

4. Множество попарно несовместных событий образует **полную группу событий**, если в результате отдельно взятого испытания появление одного из них является достоверным событием.

Если нас интересует одновременное наступление нескольких событий, то речь идет об умножении вероятностей. В этом случае события можно разделить на зависимые и независимые.

5. Два события называются **независимыми**, если вероятность одного из них не зависит от появления или не появления другого.

6. **Условная вероятность** — вероятность первого события при условии, что произошло второе событие.

7. Два события называются **зависимыми**, если вероятность одного из них зависит от появления или не появления другого события.

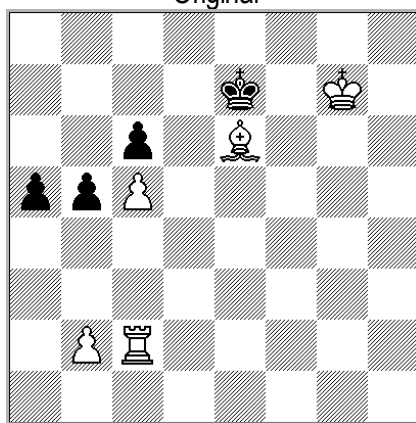
8. **Теорема Байеса** позволяет выяснить вероятность одного события при условии, что произошло связанное с ним другое событие.

Формулы теории вероятностей

1. $P(A) = \frac{m}{n}$ – Классическое определение вероятности. Здесь n – общее число всех равновозможных элементарных исходов испытания, которые образуют полную группу событий; m – количество элементарных исходов, благоприятствующих событию A .
2. $P(A+B) = P(A) + P(B)$ – Сложение вероятностей несовместных событий.
3. $P(A+B) = P(A) + P(B) - P(A*B)$ – Сложение вероятностей совместных событий.
4. $P(A*B) = P(A) * P(B)$ – Умножение вероятностей независимых событий.
5. $P(A*B) = P(A) * P(B|A)$ – Умножение вероятностей зависимых событий.
6. $P(B|A) = \frac{P(A*B)}{P(A)}$ – Условная вероятность. Вероятность события B при условии, что произошло событие A .
7. $P(A) = \sum_{k=1}^n P(H_k) * P(A|H_k)$ – Формула полной вероятности. Здесь $H_1, H_2, \dots, H_n$ – полная группа событий.
8. $P(H_k|A) = P(H_k) * P(A|H_k) / P(A) = P(H_k) * P(A|H_k) / \sum_{i=1}^n P(H_i) * P(A|H_i)$ – формула Байеса.
Гипотезы $H_1, H_2, \dots, H_n$ образуют полную группу событий
Здесь $P(H_k)$ – априорные вероятности гипотез, $P(H_k|A)$ – апостериорные вероятности гипотез.

№1. Эдуард Эйлазян

Original



Ser.h#11–N? 5+4
How many different solutions? (N=?)

SP-1. 1.Kd8 2.Kc7 3.Kb7 4.Ka6 5.a4 6.a3 7.axb2 8.Ka5 9.Ka4 10.b1R 11.Rb4 Ra2#

Базис решения суперпозиции-1 содержит две траектории, связанные схемой Каталана: 6 ходов короля и 5 ходов пешки "а". Конфигурация, в которой две взаимосвязанные траектории частично перекрываются, называется схемой Каталана.

Схема Каталана $C(k, m, q)$ содержит три независимых параметра: k – длина первой траектории, m – длина второй траектории, q – длина «свободной» (независимой) части второй траектории. Для этой схемы число решений (сумма Каталана) вычисляется по биномиальным коэффициентам по формуле $S = C_{m+k}^m - C_{m+k}^{m-q-1}$.

В суперпозиции-1 $C(k, m, q) = C(5, 6, 4)$. Сумма Каталана $S = C_{11}^6 - C_{11}^1 = 462 - 11 = 451$. Количество решений **N = 451**.

Постановка задачи. Дана суперпозиция-1. Требуется найти такое решение T , чтобы любое наугад выбранное решение L не содержало общих позиций с T (кроме двух крайних) с вероятностью **a) $P=5/41$; b) $P=2/11$.**

Решение. Построим решетку в системе координат xOy . По оси Ox будем откладывать ходы пешки, а по оси Oy – ходы короля. Узлы решетки соответствуют позициям, ребра – ходам решения. Каждое решение суперпозиции – ломаная, соединяющая узлы $O(0, 0)$ и $F(5, 6)$. Начнем решение задачи с пункта **a) $P(T, L)=5/41$** . В пробной версии выберем в качестве T решение, в котором ходы короля выполняются в приоритетном порядке: $O(0, 0) - (0, 4) - (1, 4) - (1, 5) - (2, 6) - F(2, 6)$. Тогда зона выбора для решения L будет ограничена двумя траекториями фазовой точки: $O(0, 0) - (5, 0) - F(5, 6)$ и $O(0, 0) - (1, 0) - (1, 3) - (2, 3) - (2, 4) - (3, 4) - (3, 5) - (5, 5) - F(5, 6)$.

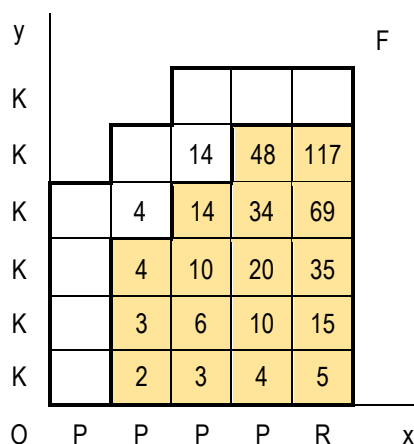


Рис. 1

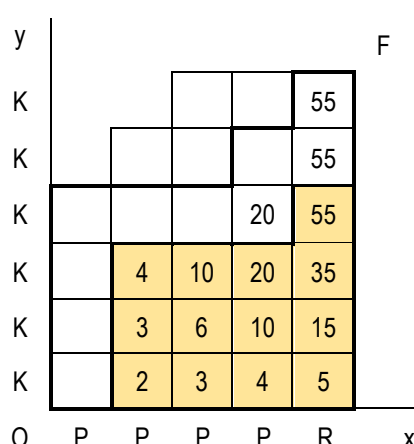


Рис. 2

Заполним решетку для возможных решений **L** (Рис. 1). Сумма этой решетки $S = 117$, а $P(T, L) = 117/451 > 5/41$.

Для выполнения условия $P(T, L) = 5/41$ необходимо, чтобы $P(T, L) = 5/41 = S/451$. Отсюда $S = 55$.

Следовательно, зону для выбора **L** надо ограничить так, чтобы получить решетку с суммой $S = 55$. Замечаем, что в 3-й строке стоят частичные суммы 20 и 35, которые в сумме дают нужное значение 55.

Путем соответствующей трансформации **T** получим подходящую решетку для **L** (Рис. 2).

Траектория фазовой точки для решения **T**: $O(0, 0) - (0, 4) - (3, 4) - (3, 5) - (4, 5) - (4, 6) - F(5, 6)$.

Решение **T** суперпозиции: **1.Kd8 2.Kc7 3.Kb7 4.Ka6 5.a4 6.a3 7.axb2 8.Ka5 9.b1R 10.Ka4 11.Rb4 Ra2#**

Решение **L**, не имеющее общих позиций с решением **T**, может быть выбрано наугад с вероятностью $P = 55/451 = 5/41$.

Перейдем к решению пункта **б)** $P(T, L) = 2/11$.

В отличие от пункта **а)** в пробной версии выберем в качестве **T** решение, в котором ходы *пешки* выполняются в приоритетном порядке:

$O(0, 0) - (0, 4) - (5, 0) - F(5, 6)$. Тогда зона выбора для решения **L** будет ограничена двумя траекториями фазовой точки:

$O(0, 0) - (0, 1) - (4, 1) - (4, 6) - F(5, 6)$ и $O(0, 0) - (0, 4) - (1, 4) - (1, 5) - (2, 5) - (2, 6) - F(5, 6)$.

Дальнейшие рассуждения те же, что и в случае **а)**.

у							F
К			14	48	117		
К	4		14	34	69		
К		4	10	20	35		
К			3	6	10	15	
К			2	3	4	5	
К							
О	Р	Р	Р	Р	Р	Р	х

Рис. 3

у							F
К			14	48	82	82	
К	4		14	34	34		
К		4	10	20			
К			3	6	10		
К			2	3	4		
К							
О	Р	Р	Р	Р	Р	Р	х

Рис. 4

Заполним решетку для возможных решений **L** (Рис. 3). Сумма этой решетки $S = 117$, а $P(T, L) = 117/451 > 2/11$.

Для выполнения условия $P(T, L) = 2/11$ необходимо, чтобы $P(T, L) = 2/11 = S/451$. Отсюда $S = 82$. Значит зону для выбора **L** надо ограничить так, чтобы получить сумму решетки $S = 82$. Замечаем, что в 3-м столбце стоят частичные суммы 48 и 34, которые в сумме дают нужное значение 82. Путем соответствующей трансформации **T** получим подходящую решетку для **L** (Рис. 4).

Траектория фазовой точки для решения **T**: $O(0, 0) - (4, 0) - (4, 4) - (5, 4) - F(5, 6)$.

Решение **T** суперпозиции: **1.a4 2.a3 3.axb2 4.b1R 5.Kd8 6.Kc7 7.Kb7 8.Ka6 9.Rb4 10.Ka5 11.Ka4 Ra2#**

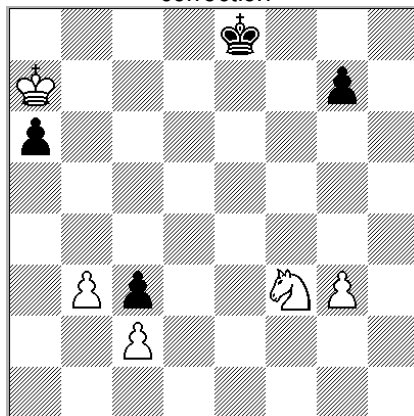
Решение **L**, не имеющее общих позиций с решением **T**, может быть выбрано наугад с вероятностью $P = 82/451 = 2/11$.

Задача решена.

№2. Eduard Eilazyan

SuperProblem, G632, 03-12-2024

correction



Ser.h#24-N?

5+4

How many different solutions? (N=?)

SP-2. 1.a5 2.a4 3.a3 4.a2 5.a1N 6.Nxc2 7.Nb4 8.c2 9.c1R 10.Rg1 11.Rxg3 12.Rg5 13.Rc5 14.g5 15.g4 16.g3 17.g2 18.g1B 19.Bh2 20.Bc7 21.Ba5 22.Kd7 23.Kc6 24.Kb5 Nd4#

Базис решения суперпозиции-2 содержит две автономные траектории: 3 хода короля и серию из 21-го хода с тремя различными слабыми превращениями.

Количество решений $N = C_{24}^3 = 24!/(3!*21!) = 2024$. **N = 2024.**

Постановка задачи. Дана суперпозиция-2. Известно, что в наугад выбранном решении (событие **A**) 10-й ход является k-м ходом короля (гипотезы H_k , $k = 1, 2, 3$). Найти вероятность события **A** и апостериорные вероятности гипотез H_k .

Решение. Построим решетку суперпозиции-2.

K									14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	H_3
K	3	6	10	15	21	28	36			91	78	66	55	45	36	28	21	15	10	6	3	H_2
K	2	3	4	5	6	7	8	9														H_1
	P	P	P	P	P	N	N	P	P	R	R	R	R	P	P	P	P	P	B	B	B	

В событии **A** 10-й ход может быть 1-м ходом короля (гипотеза H_1), 2-м ходом короля (гипотеза H_2), 3-м ходом короля (гипотеза H_3).

Все гипотезы равновероятны, т.е. $P(H_1) = P(H_2) = P(H_3) = 1/3$.

Вероятность события **A** найдем по формуле полной вероятности $P(A) = \sum_{k=1}^3 P(H_k) * P(A|H_k)$

Гипотезы H_k несовместны и образуют полную группу событий.

Найдем условные вероятности $P(A|H_k)$ по решетке.

$P(A|H_1) = P(A*H_1)/N = 1*91/2024 = 91/2024$; $P(A|H_2) = P(A*H_2)/N = 9*14/2024 = 126/2024$; $P(A|H_3) = P(A*H_3)/N = 36*1/2024 = 36/2024$.

Найденные значения подставим в формулу полной вероятности. $P(A) = (1/3) * (91+126+36)/2024 = 1/24$. **$P(A) = 1/24$.**

Апостериорные вероятности гипотез найдем по формуле Байеса $P(H_k|A) = P(H_k) * P(A|H_k)/P(A)$.

$P(H_1|A) = P(H_1) * P(A|H_1)/P(A) = (\frac{1}{3} * \frac{91}{2024}) * 24 = \frac{91}{253} \approx 0.36$ **$P(H_1|A) \approx 0.36$**

$P(H_2|A) = P(H_2) * P(A|H_2)/P(A) = (\frac{1}{3} * \frac{126}{2024}) * 24 = \frac{126}{253} \approx 0.50$ **$P(H_2|A) \approx 0.50$**

$P(H_3|A) = P(H_3) * P(A|H_3)/P(A) = (\frac{1}{3} * \frac{36}{2024}) * 24 = \frac{36}{253} \approx 0.14$ **$P(H_3|A) \approx 0.14$**

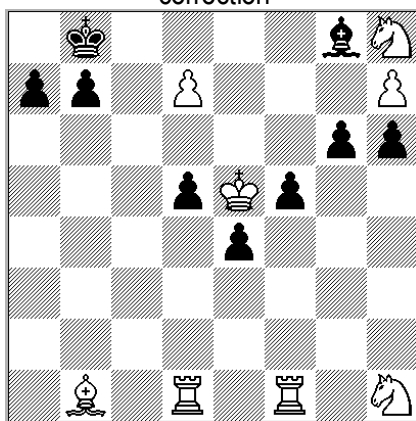
Как видим, после наступления события **A** произошла переоценка вероятностей гипотез.

Следующие две суперпозиции №3 и №4 входят в серию "рекордных" по числу решений, но само решение трудностей не вызывает поскольку базис решения содержит лишь автономные траектории. Для каждой суперпозиции сформулированы две идентичные по постановке и решению вероятностные задачи.

№3. Eduard Eilazyan

feenschach, 13298, December 2024

correction



Ser.h=35-N? 8+9

How many different solutions? (N=?)

SP-3. 1.Kc7 2.Kd8 3.Ke7 4.Kf8 5.Kg7 6.Kxh8 7.Bf7 8.Be8 9.b5 10.b4 11.b3 12.b2 13.a5 14.a4 15.a3 16.a2 17.a1B 18.h5 19.h4 20.h3 21.h2 22.g5 23.g4 24.g3 25.g2 26.g1B 27.f4 28.f3 29.f2 30.e3 31.e2 32.e1B 33.d4 34.d3 35.d2 dxe8N

Базис решения суперпозиции-3 содержит 9 автономных траекторий. Число решений N рассчитывается по формуле

$N = (\sum_{i=1}^k n_i)! / \prod_{i=1}^k (n_i!)$. $N = 35! / (6!*2!*5!*4!*3!*3!*5!*4!) = 4.0052666049557238709632e+27$

Постановка задачи. Дана суперпозиция-3. После 18-ти ходов из начальной позиции

1.Kc7 2.Kd8 3.Ke7 4.Bf7 5.a5 6.a4 7.b5 8.b4 9.d4 10.e3 11.e2 12.f4 13.f3 14.g5 15.g4 16.g3 17.h5 18.h4 возникает позиция **A**.

1) Найти вероятность того, что наугад выбранное решение содержит позицию **A** (событие **U**).

2) Найти вероятность того, что **A** и наугад выбранная позиция **B** входят хотя бы в одно из решений (событие **V**).

Решение 1). Введем обозначения: О – начальная позиция, F – конечная позиция. $N(J)$ – число путей, ведущих от О к A; $N(I)$ – число путей, ведущих от A к F. Составим таблицу числа ходов по всем 9-ти траекториям.

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Σ
n_i	6	2	5	4	3	3	3	5	4	35
OA	3	1	2	2	1	2	2	3	2	18
AF	3	1	3	2	2	1	1	2	2	17

По той же формуле $N = (\sum_{i=1}^k n_i)! / \prod_{i=1}^k (n_i!)$ найдем $N(J)$ и $N(I)$.

$N(J) = 18! / (3!*1!*2!*2!*1!*2!*3!*2!)$. $N(I) = 17! / (3!*1!*3!*2!*2!*1!*1!*2!*2!)$.

Вероятность события **U** найдем по формуле $P(U) = N(J) * N(I) / N$.

$$P(U) = (18! * 17! * 6! * 2! * 5! * 4! * 3! * 3! * 5! * 4!) / (35! * 3! * 2! * 2! * 2! * 3! * 2! * 3! * 2! * 2! * 2!) = 1/1167. \quad P(U) = 1/1167$$

Решение 2). Мысленно построим решетку суперпозиции-3 в 9-мерной системе координат. Тогда позиции **A** и **B** будут соответствовать узлам решетки, а ходы решения – ребрам. В такой системе координат позиция **A** будет соответствовать узлу **A**(3,1,2,2,1,2,2,3,2) при соответствующем выборе осей. Для того, чтобы узлы **A**(a₁,a₂,a₃,a₄,a₅,a₆,a₇,a₈,a₉) и **B**(b₁,b₂,b₃,b₄,b₅,b₆,b₇,b₈,b₉) находились на одной траектории фазовой точки решетки (или что то же самое, позиции **A** и **B** входили в одно решение), необходимо выполнение одного из условий: $Q = \{B: b_i \leq a_i \forall i\}$ или $R = \{B: a_i \leq b_i \forall i\}$.

Множество **Q** содержит $N(Q) = \Pi(a_i + 1)$ узлов, а множество **R** содержит $N(R) = \Pi(n_i - a_i + 1)$ узлов.

Заметим, что эти множества имеют один общий элемент – узел **A**.

$$N(Q) = \Pi(a_i + 1) = 4 * 2 * 3 * 3 * 2 * 3 * 3 * 4 * 3 = 15552. \quad N(R) = \Pi(n_i - a_i + 1) = 4 * 2 * 4 * 3 * 3 * 2 * 2 * 3 * 3 = 10368.$$

$$\text{Общее число узлов решетки } N = \Pi(n_i + 1) = 7 * 3 * 6 * 5 * 4 * 4 * 4 * 6 * 5 = 1\,209\,600.$$

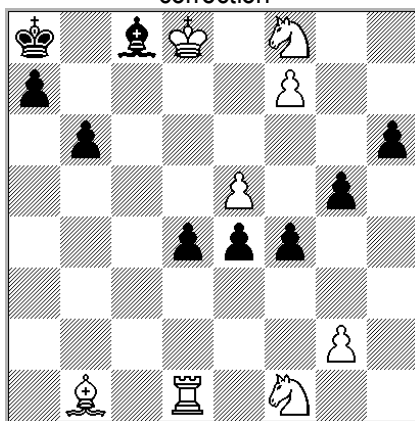
Совпадение узла **B** с узлом **A** будем считать исходом, благоприятствующим наступлению события **V**.

$$\text{Вероятность события } V: P(V) = [N(Q) + N(R) - 1] / N = (15552 + 10368 - 1) / 1\,209\,600 = 25937 / 1\,209\,600 \approx 3/140 \approx 0.0214. \quad P(V) \approx 3/140 \approx 0.0214.$$

№4. Eduard Eilazyan

SuperProblem, G633, 03-12-2024

correction



Ser.h=35-N?

8+9

How many different solutions? (N=?)

SP-4. 1.Bf5 2.Bh7 3.Bg8 4.a5 5.a4 6.a3 7.a2 8.a1B 9.b5 10.b4 11.b3 12.b2 13.d3 14.d2 15.e3 16.e2 17.e1B 18.f3 19.f2 20.g4 21.g3 22.h5 23.h4 24.h3 25.h2 26.h1N 27.Kb7 28.Kc6 29.Kd5 30.Kxe5 31.Kf6 32.Kg7 33.Kxf8 34.Kg7 35.Kh8 f8Q пат.

Базис решения суперпозиции-4 содержит 9 автономных траекторий. Число решений **N** рассчитывается по формуле

$$N = (\sum_{i=1}^k n_i)! / \prod_{i=1}^k (n_i!). \quad N = 35! / (9! * 3! * 5! * 4! * 2! * 3! * 2! * 2! * 5!) = 2,860904717825517050688e+26$$

Постановка задачи. Дана суперпозиция-4. После 18-ти ходов из начальной позиции

1.Kb7 2.Kc6 3.Kd5 4.Kxe5 5.Bf5 6.Bh7 7.a5 8.a4 9.a3 10.b5 11.b4 12.d3 13.e3 14.e2 15.f3 16.g4 17.h5 18.h4 возникает позиция **A**.

1) Найти вероятность того, что наугад выбранное решение содержит позицию **A** (событие **U**).

2) Найти вероятность того, что **A** и наугад выбранная позиция **B** входят хотя бы в одно из решений (событие **V**).

Решение 1). Введем обозначения: **O** – начальная позиция, **F** – конечная позиция. $N(J)$ – число путей, ведущих от **O** к **A**; $N(I)$ – число путей, ведущих от **A** к **F**. Составим таблицу числа ходов по всем 9-ти траекториям.

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Σ
n _i	9	3	5	4	2	3	2	2	5	35
OA	4	2	3	2	1	2	1	1	2	18
AF	5	1	2	2	1	1	1	1	3	17

По той же формуле $N = (\sum_{i=1}^k n_i)! / \prod_{i=1}^k (n_i!)$ найдем $N(J)$ и $N(I)$.

$$N(J) = 18! / (4! * 2! * 3! * 2! * 1! * 2! * 1! * 1! * 2!) = 18! / (4! * 3! * 16) = 2\,778\,808\,032\,000$$

$$N(I) = 17! / (5! * 1! * 2! * 2! * 1! * 1! * 1! * 1! * 3!) = 17! / (5! * 24) = 123\,502\,579\,200$$

Вероятность события **U** найдем по формуле $P(U) = N(J) * N(I) / N$.

$$P(U) = (18! * 17! * 9! * 3! * 5! * 4! * 2! * 3! * 2! * 5!) / (35! * 4! * 2! * 3! * 2! * 2! * 5! * 2! * 2! * 3!) = 5184 / 4321493 \approx 0,0012. \quad P(U) \approx 0,0012$$

Решение 2). Мысленно построим решетку суперпозиции-4 в 9-мерной системе координат. Тогда позиции **A** и **B** будут соответствовать узлам решетки, а ходы решения – ребрам. В такой системе координат позиция **A** будет соответствовать узлу **A**(4,2,3,2,1,2,1,1,2) при соответствующем выборе осей. Для того, чтобы узлы **A**(a₁,a₂,a₃,a₄,a₅,a₆,a₇,a₈,a₉) и **B**(b₁,b₂,b₃,b₄,b₅,b₆,b₇,b₈,b₉) находились на одной траектории фазовой точки решетки (или что то же самое, позиции **A** и **B** входили в одно решение суперпозиции), необходимо выполнение одного из условий: $Q = \{B: b_i \leq a_i \forall i\}$ или $R = \{B: a_i \leq b_i \forall i\}$.

Множество **Q** содержит $N(Q) = \Pi(a_i + 1)$ узлов, а множество **R** - $N(R) = \Pi(n_i - a_i + 1)$ узлов.

Заметим, что эти множества имеют один общий элемент – узел **A**.

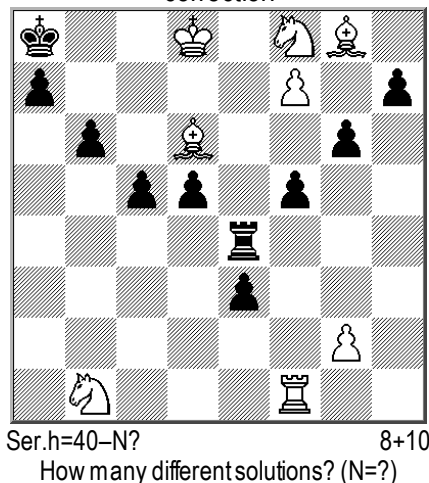
$$N(Q) = \Pi(a_i + 1) = 5 * 3 * 4 * 3 * 2 * 3 * 2 * 2 * 3 = 12\,960. \quad N(R) = \Pi(n_i - a_i + 1) = 6 * 2 * 3 * 3 * 2 * 2 * 2 * 4 = 6\,912.$$

$$\text{Общее число узлов решетки } N = \Pi(n_i + 1) = 10 * 4 * 6 * 5 * 3 * 4 * 3 * 3 * 6 = 777\,600.$$

Совпадение узла **B** с узлом **A** будем считать исходом, благоприятствующим наступлению события **V**.

$$\text{Вероятность события } V: P(V) = [N(Q) + N(R) - 1] / N = (12\,960 + 6\,912 - 1) / 777\,600 = 19\,871 / 777\,600 \approx 23/900 \approx 0,02555. \quad P(V) \approx 0,02555$$

№5. Eduard Eilazyan
Variantim 95, April 2025, №4510
correction



SP-5. 1.a5 2.a4 3.a3 4.a2 5.a1B 6.b5 7.b4 8.b3 9.b2 10.c4 11.c3 12.c2 13.c1B 14.Rd1 15.Rd1 16.d4 17.d3 18.d2 19.e2 20.e1B 21.f4 22.f3 23.f2 24.g5 25.g4 26.g3 27.h5 28.h4 29.h3 30.h2 31.h1N 32.Kb7 33.Kc6 34.Kxd6 35.Ke5 36.Kf6 37.Kg7 38.Kxf8 39.Kg7 40.Kh8 f8Q пат.
Базис решения суперпозиции-5 содержит 9 автономных траекторий.

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Σ
n _i	9	5	4	4	5	2	3	3	5	40

Число решений N рассчитывается по формуле $N = (\sum_{i=1}^k n_i)! / \prod_{i=1}^k (n_i!)$
 $N = 40! / (9! \cdot 5! \cdot 4! \cdot 4! \cdot 5! \cdot 2! \cdot 3! \cdot 3! \cdot 5!) = 3,13749698594488803914851584e+31$

Постановка задачи. Дана суперпозиция-5. **W** – множество решений, в которых ходы каждой траектории делаются подряд. Разобьем **W** на два подмножества **F** и **G** в отношении 2:3. Пусть заданы две базисные траектории решения суперпозиции-5: **s** и **r**. Решения подмножества **F**, в которых **s** предшествует **r**, составляют пятую часть всех решений **F**. В наугад выбранном решении из множества **W** траектория **s** следует после траектории **r** (событие **A**). Найти вероятности событий: **A** ∈ **F** и **A** ∈ **G**.

Решение. В постановке задачи можно выделить две гипотезы: гипотеза **H₁**: выбранное решение принадлежит множеству **F** и гипотеза **H₂**: выбранное решение принадлежит множеству **G**. Априорные вероятности гипотез известны: $P(H_1) = 0.4$, $P(H_2) = 0.6$. Требуется найти апостериорные вероятности гипотез после наступления события **A**. Эти гипотезы образуют полную группу событий. Более того, в силу симметрии соответствующих решений $P(A) = P(\bar{A}) = 0.5$. В самом деле, каждому решению $\bar{A}(\dots s \dots r \dots)$ можно поставить в соответствие решение $A = (\dots r \dots s \dots)$, где переставлены местами траектории **s** и **r**. Обозначим через x долю решений $\bar{A}$, содержащихся в **G**, т.е. $x = P(\bar{A}|H_2)$

По формуле полной вероятности для $P(\bar{A})$ должно выполняться равенство
 $P(\bar{A}) = P(H_1) \cdot P(\bar{A}|H_1) + P(H_2) \cdot P(\bar{A}|H_2) = 0.4 \cdot 0.2 + 0.6 \cdot x = 0.5$. Отсюда находим $x = (0.5 - 0.08) / 0.6 = 0.7$. $P(\bar{A}|H_2) = 0.7$.
 Тогда $P(\bar{A}|H_1) = 1 - P(\bar{A}|H_2) = 1 - 0.7 = 0.3$.

Теперь у нас есть все необходимые данные, чтобы по формуле Байеса найти условную вероятность $P(H_1|A)$:
 $P(H_1|A) = P(H_1) \cdot P(A|H_1) / P(A) = 0.4 \cdot 0.8 / 0.5 = 0.64$.

Аналогично можно найти условную вероятность $P(H_2|A)$.
 $P(H_2|A) = P(H_2) \cdot P(A|H_2) / P(A) = 0.6 \cdot 0.3 / 0.5 = 0.36$.

Апостериорные вероятности гипотез: **$P(H_1|A) = 0.64$; $P(H_2|A) = 0.36$** .

Как и следовало ожидать, апостериорные вероятности гипотез **H₁** и **H₂** отличаются от априорных вероятностей. Произошла переоценка вероятностей гипотез после события **A**.

В данной статье на конкретных примерах мы рассмотрели возможности использования суперпозиций для постановки и решения задач по теории вероятностей. Во многих учебниках при изложении основ теории вероятностей в качестве моделей для изучения случайных событий часто используются монеты, игральные кости и урны с шарами. С одной стороны это обеспечивает простоту и наглядность изложения учебного материала, но с другой – сильно ограничивает возможности постановки сложных содержательных задач. Использование суперпозиций в качестве базисных моделей позволяет ставить и решать интересные вероятностные задачи любой сложности. А это в свою очередь открывает новые возможности использования методов шахматного моделирования при решении научных и практических задач.